METODI DELLA ECONOMIA MATEMATICA: TEORIA DEI CONTROLLI E TEORIA DEI GIOCHI DIFFERENZIALI

§ 1 - Come è noto, da più di un secolo si utilizza lo strumento matematico per cercare di investigare il comportamento dell'uomo nei riguardi dei beni economici; la nuova branca di matematica applicata che è nata da queste ricerche viene abitualmente chiamata "Economia matematica". L'evoluzione di questa scienza si potrebbe descrivere brevemente dicendo che essa è avvenuta secondo un arco che inizia con i lavori di L. A. Quételet e D. Ricardo, e poi di L. Walras e V. Pareto per giungere ai nostri giorni ad uno stuolo di ricercatori, tra i quali ci limitiamo a ricordare J. Von Neumann, K. J. Arrow e W. Leontief. Sostanzialmente si potrebbe dire che la procedura abituale della Economia matematica è quella che porta ad assiomatizzare in modo più o meno esplicito certi comportamenti umani e ad applicare i metodi della Matematica per tradurre i comportamenti stessi e poi dedurre le conseguenze dagli assiomi posti e dalle ipotesi enunciate a riguardo di certi particolari problemi.

È del tutto ovvia l'osservazione del fatto che il comportamento dell'uomo, anche nel campo ristretto della Economia, è un fenomeno complesso e spesso imprevedibile; di conseguenza il procedimento di matematizzazione di questo comportamento, e la enunciazione di ipotesi che permettono di tradurlo con i simboli della matematica, possono essere fatti con atteggiamenti molto diversi e con risultati molto disparati. Inoltre si deve osservare che nel caso dell'Economia matematica la enunciazione di "leggi" è quanto mai problematica, perché la materia che si tratta non è suscettibile di esperimento ma soltanto di osservazione, ed inoltre i fenomeni che si osservano sono deformati dalla libertà dell'uomo, che non rende possibile enunciare delle leggi apodittiche e sicure. Infine le difficoltà delle misurazioni delle grandezze che vengono prese in considerazione hanno fatto sì che si sia sviluppata addirittura una branca della scienza economica, quella che viene chiamatala Econometria, la quale si dedica a studiare ed a sviluppare i metodi per la misurazione delle grandezze che vengono prese in considerazione dalla Economia.

È bensì vero che non si può accettare la visione della Matematica come scienza della quantità soltanto; tutti gli sviluppi recenti dell'Algebra, che conducono questa scienza così vicino alla logica pura, stanno a dimostrare che gli oggetti puramente quantificabili, secondo l'accezione abituale e classica del termine, sono soltanto una parte dell'oggetto della Matematica. Viene così a cadere una delle critiche le quali venivano elevate spesso alla Economia matematica da parte di certi economisti "letterari", critiche che erano basate sostanzialmente sulla osservazione che non tutte le cose di cui si occupa l'Economia sono quantificabili e sono riducibili a numeri.

Vorremmo ricordare che delle critiche di questo tipo sono state avanzate per esempio a proposito delle ricerche di V. Pareto, ed in particolare a proposito del significato di quella funzione che egli chiama '*ofelimità*' e che oggi viene correntemente designata come 'funzione di utilità' del consumatore. Questa funzione, si diceva, non ha senso perché dovrebbe essere considerata come la misura della "soddisfazione" che viene provata dal consumatore nel consumare un certo insieme di quantità di beni, e questa "soddisfazione" non ha misura, perché si tratta di una sensazione puramente soggettiva e non misurabile nel senso comune che questo termine ha nel linguaggio di tutti i giorni.

I progressi successivi della Economia matematica hanno portato a precisare il significato della funzione di utilità in modo che non lascia adito a critiche sensate; ma vogliamo ricordare qui che già lo stesso Pareto aveva sottolineato il fatto che l'Economia matematica si occupa di oggetti astratti, di ipotesi di lavoro e che lo "homo oeconomicus" di cui talvolta si parla è una astrazione, né più né meno come lo è il "corpo rigido", oppure il "corpo puntiforme" di cui si occupa la Meccanica razionale oppure, possiamo aggiungere, la "trasformazione adiabatica" o anche il "gas perfetto" di cui si occupa la Termodinamica.

È chiaro d'altra parte che se si vuole utilizzare qualche strumento della Matematica per conoscere meglio il mondo reale occorre enunciare delle ipotesi semplificatrici, ipotesi che sostanzialmente riconoscono il fatto (chiaro d'altronde) che i nostri concetti ed i nostri strumenti logici non possono rendere tutta la realtà nella sua interezza; la difficoltà di rendere la realtà è ancora maggiore quando ci si occupa dell'uomo e delle sue azioni, come nel caso della Economia. Ma ciò non vuol dire che si debba rinunciare ad analizzare la realtà, anche se siamo ben consci del fatto che non ne potremo mai rendere completamente ogni aspetto. Tanto varrebbe per esempio rinunciare a studiare la psicologia per il fatto che l'uomo singolo è completamente libero e generalmente imprevedibile. Tuttavia si può anche osservare che l'impiego della matematica per lo studio dei fenomeni economici costringe sì ad enunciare delle ipotesi che sono spesso drasticamente semplificatrici, ma costringe anche a prendere coscienza di tutte queste ipotesi e ad enunciarle in modo chiaro, testimoniando così della validità del detto di J. B. Fourier il quale osservava argutamente che "....la mathématique.... n'a point de signes pour exprimer les notions confuses".

Da un certo punto di vista queste circostanze rendono più affascinante per qualcuno lo studio della Economia matematica, perché la realtà che si vuole studiare è tanto mutevole ed imprevedibile che la strada per conoscerla è seminata di trabocchetti e di difficoltà. Da un altro punto di vista si potrebbe dire che queste difficoltà debbono rendere il ricercatore sempre più prudente, di modo che egli sia sempre conscio dei limiti dei suoi strumenti e del continuo emergere della realtà rispetto alle rappresentazioni che egli ne dà.

È questa un'altra ragione per cui in Economia matematica si rinuncia (come abbiamo detto) a parlare di "leggi" e si preferisce parlare di "modello", intendendo con questa espressione indicare un insieme di relazioni matematiche con le quali si cerca di rendere alcuni aspetti dei fenomeni economici. Ho parlato poco fa di "alcuni aspetti" e di "relazioni matematiche"; con ciò non intendiamo dire che non si possano dominare con strumenti matematici anche degli aspetti della realtà che non sono quantitativi. Per esempio si potrebbe pensare, come è stato fatto, di assiomatizzare mediante relazioni di preferenza il comportamento del soggetto di fronte ai beni di consumo. Tali relazioni possono essere studiate nel loro aspetto formale e nelle regole che le reggono anche senza che necessariamente debbano dar luogo a delle misure almeno in un primo momento; in un secondo tempo, mediante opportune ipotesi sulla topologia dello spazio delle quantità di beni, si può giungere a collegare gli aspetti puramente logico-formali con gli aspetti più propriamente quantitativi del fenomeno della scelta del consumatore. E, nonostante ciò, pensiamo che anche lo studio delle proprietà formali della relazione di preferenza, sul quale viene spesso basata l'analisi del comportamento del consumatore, sia di competenza della matematica.

È appena necessario avvertire che anche nel caso dell'analisi della relazione di preferenza del consumatore, la enunciazione di "assiomi" non vuole assolutamente avere il significato di verità assolutamente incontrovertibili e valide in generale e sempre; con tale enunciazione si vuole semplicemente indicare qualche ipotesi di comportamento: quando le ipotesi sono state formulate non può sussistere alcun dubbio sulle deduzioni, purché siano formalmente ineccepibili e condotte con la logica interna del simbolismo adottato. Pertanto eventuali discussioni sulla aderenza della teoria alla "realtà" quale che sia possono essere prese in considerazione soltanto per quanto riguarda il contenuto delle ipotesi e delle conseguenze che ne sono state tratte, non sulla validità del processo deduttivo.

§2 - Non avrei condotto avanti questa lunga discussione a proposito del significato e della portata della Matematica nella Economia, se non fosse per due ragioni principali: la prima è quella di ricordare quale sia il significato delle procedure abituali e dell'atteggiamento costante di coloro i quali utilizzano la Matematica per conoscere la natura (diciamo dei cultori di Matematica applicata), atteggiamento che è ben noto ai matematici applicati in materie classiche (diciamo la Fisica, la Chimica, la Tecnica ecc.), e che non attribuisce alla matematica dei poteri quasi magici per la risoluzione dei problemi e per la chiarificazione di certe situazioni, ma anzi mantiene ben chiara la coscienza del compito strumentale del linguaggio matematico. Compito che tuttavia non vuole essere rinuncia a dare una impronta metodologica alle ricerche, che sottolinea la opportunità di avviare la scienza verso il modello ideale di una assiomatizzazione nella quale ogni ipotesi sia chiaramente ed esplicitamente enunciata all'inizio dello sviluppo di una teoria, secondo lo spirito di quel detto di Fourier che abbiamo citato poco fa.

La seconda ragione è che questa analisi ci porta vicini all'oggetto della **presente conferenza**. A questo proposito vorrei ricordare che molto spesso la schematizzazione del comportamento economico dell'uomo è stata ottenuta per la strada seguente: cercando di tradurre il comportamento del soggetto con la ricerca di valori ottimali di certe funzioni o di traiettorie ottimali in relazione a certi funzionali.

Gli argomenti che vorrei sfiorare oggi riguardano l'impiego della teoria dei controlli e della teoria dei giochi differenziali. Nel primo caso, cioè in quello dell'impiego della teoria dei controlli, vorrei presentare alcuni problemi (largamente schematizzati) del tipo di quelli che si presentano al programmatore o ad una autorità quale si voglia che si ponga come scopo il raggiungimento di determinati obbiettivi e abbia anche il potere di utilizzare i mezzi per conseguirli. In modo grossolanamente approssimato e qualitativo, si potrebbe dire che l'adozione della teoria dei controlli in Economia ha portato a degli schemi concettuali che sono spesso più vicini alla realtà di quelli precedentemente adottati perché possono condurre a dei casi di discontinuità del controllo, imposta dalla natura stessa del problema e dallo strumento adottato.

Si direbbe che si è verificato un fenomeno in qualche modo analogo a quello che è avvenuto nella fisica quantistica, con l'impostazione di Schrödinger: la discontinuità e la quantificazione, che prima di allora erano introdotte mediante ipotesi aggiuntive ed in certo modo *sovrapposte* al modello preesistente, divennero delle conseguenze del quadro matematico adottato per descrivere la realtà.

In altre parole la adozione dello schema delle equazioni differenziali del secondo ordine con condizioni ai limiti condusse spontaneamente ad una introduzione della discontinuità della soluzione che scaturiva dallo stesso strumento matematico adottato, così come nel problema classico della corda vibrante nasce spontaneamente una infinità numerabile discreta di soluzioni, dalla stessa impostazione matematica del problema.

§3 - Nel secondo caso vorrei esporre qualche elemento della problematica più attuale della trattazione matematica della competizione economica. È noto che la cosiddetta teoria dei giochi di strategia costituisce una branca relativamente recente della matematica e trae la sua origine dall'opera ormai classica di J. Von Neumann ed O. Morgenstern, opera che nel suo stesso titolo fa riferimento al comportamento economico dell'uomo. (Von Neumann J.- Morgenstern O., *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton N.J. Princeton University Press,1944).

Non sto a riferire qui sulle discussioni che sono ancora in corso a proposito della ipotesi (detta del "min-max") che regge la teoria; mi limito a dire che questa ha trovato una sua naturale ed immediata estensione nella teoria dei giochi differenziali, con la quale è possibile, tra l'altro, cercare di rendere il comportamento economico di un soggetto che - istante per istante - tiene conto delle scelte fatte da altri. È facile convincersi della fecondità di uno strumento teorico di questo tipo, quando si rifletta sul fatto che la dimensione temporale è fondamentale per il fenomeno economico e che le decisioni di un soggetto dovrebbero poter adattarsi istantaneamente, o almeno il più presto possibile, al mutare delle situazioni, le quali a loro volta sono conseguenza della condotta di altri soggetti economici. Pertanto si potrebbe dire, con altre parole, che lo schema dei giochi differenziali appare altamente efficace per la determinazione di una politica, tanto aziendale che a livello di interi sistemi economici, che voglia tener conto della evoluzione del mondo e presentare quella adattabilità che è propria dei sistemi vivi e non delle macchine ad andamento prestabilito.

È da ricordarsi inoltre che in molte teorie classiche di Economia matematica il soggetto singolo veniva supposto in condizioni tali, di fronte ad un sistema economico, che la sua condotta non potesse influenzare sensibilmente il sistema al quale appartiene: si pensi per esempio alla teoria classica del consumatore (nella impostazione di Pareto) secondo la quale le quantità di merci disponibili e i loro prezzi non sono influenzati dalle scelte del singolo consumatore. Al contrario, nella teoria dei giochi si cerca di tener conto in modo esplicito e voluto della variazione della situazione in conseguenza della condotta del soggetto economico.

Avviando a conclusione queste considerazioni introduttive, vorrei ricordare che la utilizzazione pratica di questi nuovi metodi teorici va di pari passo con il progresso dei metodi di calcolo automatico; questo progresso ha permesso di impostare e risolvere dei problemi che non potevano essere presi in considerazione in epoche precedenti: si pensi per esempio ai metodi di programmazione lineare o più in generale ai metodi di calcolo che permettono la determinazione di soluzioni di frontiera in certi problemi economici. Tali soluzioni si presentano in modo spontaneo quando si pensi per esempio a problemi di produzione, oppure quando si rifletta al fatto che la teoria e classica del consumatore contempla abitualmente una ipotesi di "non saturazione", che permette di seguire nel procedimento di soluzione lo schema classico di Lagrange della ricerca di massimi vincolati. Tuttavia questa ipotesi non sempre è molto vicina alla realtà; e d'altra parte la enunciazione di ipotesi di saturazione del consumatore porta alla adozione di procedimenti matematici che portano alla ricerca di valori ottimali di frontiera in certi insiemi chiusi.

Infine vorrei accennare brevemente ad alcuni problemi che si possono riattaccare a quelli che qui di seguito esporrò; e ciò faccio anche per prendere coscienza delle lacune e delle incertezze che si presenteranno nella mia esposizione. Il primo argomento di studio che mi pare degno di considerazione in relazione alle conseguenze economiche è quello che riguarda la dimensione economica della informazione; su questo argomento già esistono vari studi, e la sua importanza è comprovata anche dal fatto che un recente trattato di L. Daboni si occupa espressamente dell'argomento. Mi sia permesso qui di esprimere il pensiero che l'approfondimento degli studi in questa direzione possa portare a risultati illuminanti per l'intera teoria economica. Il secondo argomento è quello che concerne l'analisi del comportamento concreto del soggetto economico; invero, quando si accetti l'atteggiamento che conduce a concludere che il principio del "min-max" è una ipotesi sul comportamento economico dell'uomo, rimane implicitamente aperta la discussione sull'adeguatezza della ipotesi stessa a rendere la realtà, e sulla ricerca di altre ipotesi più adeguate di questa; in questa direzione esistono studi recenti, ed anche in questo campo pensiamo che un approfondimento non possa che giovare alla scienza

§4 - Dopo la introduzione metodologica che precede, possiamo procedere a presentare - come promesso - alcuni esempi caratteristici di utilizzazione della teoria del controllo ottimale nella Economia. Come abbiamo detto questi metodi che stiamo per presentare permettono di lavorare - per così dire - in tempo reale, in modo che l'adattamento del processo che si richiede ottimale alla realtà esteriore sia istantaneo.

Sia dunque V^n uno spazio vettoriale ad n dimensioni sul campo reale che chiameremo, seguendo Pontryagin e altri, "spazio di fase". Sia poi un secondo spazio vettoriale V^r ad r dimensioni sempre sul campo reale, che chiameremo brevemente "spazio dei controlli".

In entrambi gli spazi considerati supponiamo date le distanze, con la abituale formula pitagorica e di conseguenza supponiamo date le topologie che conseguono da questa scelta della definizione di distanza.

Supponiamo dati due insiemi, X ed U rispettivamente, nei due spazi V^n e V^r; si abbia dunque:

$$(1)\quad X \subseteq V^n \;\; ; \;\; U \subseteq V^r .$$

La topologia che si assume nei due insiemi sarà ovviamente quella indotta dalla topologia degli spazi di immersione; come vedremo, la natura dei problemi che sono posti dalla realtà economica porterà a dare particolari proprietà topologiche a questi insiemi e determinerà di conseguenza gli aspetti più interessanti delle proprietà delle soluzioni dei problemi che prenderemo in considerazione. Indichiamo infine con I un intervallo dell'asse reale, avente un estremo inferiore t_0 ed un estremo superiore t_1 (eventualmente si potrà anche prendere in considerazione, con le opportune abituali cautele sulle quali non ci soffermiamo qui, il caso in cui t_1 tenda all'infinito); poniamo quindi

$$(2)\; I = \{t \mid t_0 \le t \le t_1\}.$$

Indichiamo con A l'insieme prodotto cartesiano di X, U ed I, ponendo quindi

$$(3)\; A = X \times U \times I,$$

e sia f una funzione avente come dominio A, a valori in V^n:

$$(4)\; f : A \longrightarrow V^n .$$

Ovviamente per assegnare la funzione vettoriale f occorre assegnare n funzioni a valori reali aventi come dominio A:

$$(4)\text{ bis }\; f_i = f_i\,(x, u, t),\;\; i = 1, 2, \dots, n.$$

Sia in secondo luogo una funzione f_0 a valori reali, avente A come dominio:

$$(5)\ f_0 : \ \longrightarrow R\ ;$$

ed infine sia F una funzione avente valori reali, ed avente come dominio l'insieme $X \times I$:

$$(6)\ F: X \times I \ \longrightarrow R.$$

Quando si scelga una funzione $u : I \longrightarrow U,$ le funzioni (4) bis danno un sistema di equazioni differenziali del primo ordine

$$(7)\ \dot{x}_i \ = \ \frac{d}{dt} = f_i\ ,\ \ i = 1, 2, \dots, n.$$

Consideriamo ora il funzionale

$$(8)\ J = \int_{t_0}^{t_1} f(x, u, t)dt \ + F\ [x(t_1),\ \ t_1]$$

nel quale *u(t)* è la funzione (vettoriale) scelta ed *x* è la funzione vettoriale che è la soluzione del sistema di equazioni differenziali (7).

Il problema che interessa la teoria del controllo ottimale è quello di determinare la funzione *u(t)* in modo che la funzione stessa sia continua, salvo al più un numero finito di valori di *t*, ed in modo che il funzionale *J* abbia il valore massimo.

OSSERVAZIONE I: Per le funzioni f ed f_0 saranno supposte valide le ipotesi che assicurano l'esistenza delle soluzioni continue delle equazioni differenziali (7) e rispettivamente che abbia senso l'integrale (8): tale integrale è inteso nel solito senso di Cauchy - Riemann. La funzione *F* sarà supposta di classe di differenziabilità almeno C^2 nell'insieme $X \times I$, di guisa che l'equazione

$$(9)\ F(x(t_1), t_1) = 0$$

rappresenti una ipersuperficie dello spazio $X \times I$ dotata delle abituali proprietà di regolarità che vengono attribuite alle ipersuperfici e che vengono considerate come "intuitive" nelle trattazioni classiche di geometria differenziale.

OSSERVAZIONE II - Il problema che abbiamo esposto è abbastanza generale. Pertanto si possono dare delle formulazioni di esso che dal punto di vista della teoria generale della Matematica appaiono come delle restrizioni delle ipotesi e delle formulazioni, ma che danno luogo a dei casi importanti per quanto particolari. I più notevoli tra questi casi particolari si hanno quando le funzioni *f* ed f_0 non dipendono in modo esplicito dal tempo, quando cioè si abbia

$$(10)\ f: X\ \times U\ \longrightarrow\ V^n\ \ \ ,\ \ \ f_0 : X\ \times U\ \longrightarrow R.$$

Il sistema considerato in questo caso viene chiamato "autonomo", mentre ovviamente il sistema che si considera nel caso generale viene chiamato "non autonomo". È appena necessario osservare che nel caso dei sistemi dell'Economia si può dire che il sistema di equazioni non autonomo è quello che rende nel modo migliore (o meglio meno peggiore) la realtà. È infatti del tutto evidente che la realtà economica e sociale varia con il momento storico; pertanto si potrebbe dire che il sistema di equazioni differenziali (6)bis non autonomo costituisce in certo senso lo strumento elettivo per la descrizione dei fenomeni economici, nel quadro nel quale stiamo muovendoci. Tuttavia pare altrettanto evidente il fatto che il sistema autonomo presenta difficoltà tecniche minori e permette una discussione che può illuminare in modo talvolta soddisfacente la realtà.
Per esempio un caso abbastanza classico di sistema non autonomo è quello in cui le equazioni (7) acquistino la forma di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, lineari, siano cioè del tipo

$$(11)\ \dot{x}_T = Ax_T + Bu_T\ ,$$

dove rispettivamente *A* e *B* sono delle matrici costanti [1]. È questo il caso in cui si ricade quando si prenda in considerazione il cosiddetto "Modello di Leontief dinamico", sul quale si può vedere un recente lavoro di P. C. Nicola, che applica a questo modello la teoria del controllo ottimale (Piercarlo Nicola, *Controllo ottimo della crescita in un sistema economico di tipo dualistico*, L'Industria, n.3, 1970, pp.3-21).
.

OSSERVAZIONE III - È del tutto evidente che il caso del calcolo delle Variazioni classico rientra nel caso cui si accenna qui, quando si abbia in particolare:

[1] Adotteremo la convenzione di considerare abitualmente i vettori come "vettori linea"; pertanto per indicare i "vettori colonna" apporremo a destra in basso il segno di trasposizione, dato da una "*T*" a esponente a destra.

$$(12)\ X = V^n \quad ; \qquad f_i = u_i\ .$$

OSSERVAZIONE IV - In particolare i problemi di brachistocronia vengono pure inquadrati nello schema che stiamo esponendo, quando si ricerchi il minimo del funzionale (8) e si ponga quindi

$$(13)\ f_0 = -1.$$

Per esempio in questo ordine di idee si può impostare il problema del modello di Leontief dinamico, quando si ricerchi la traiettoria che riduce al minimo il tempo occorrente perché il sistema economico considerato possa raggiungere un determinato livello di sviluppo.

Come è noto, la risoluzione del problema che ci interessa, nelle ipotesi che abbiamo enunciate, si può ottenere con procedimenti classici nel modo seguente: si prende in considerazione lo spazio ad *n* dimensioni di vettori duali, vettori che indicheremo con y. Si costruisce poi la funzione hamiltoniana data da

$$(14)\ H = f_0 + \sum_{k=1}^{n} y_k\, f_k.$$

Dalla forma stessa della funzione hamiltoniana si trae una notevole interpretazione del vettore *y*, interpretazione che è di molto aiuto nel compito di ricercare il significato economico degli enti che vengono introdotti nel corso della trattazione. Infatti è possibile interpretare le componenti del vettore *y* come dei coefficienti dimensionati che permettono di rendere il secondo membro della (14) omogeneo alla dimensione fisica ed economica della funzione f_0. Pertanto quando la funzione f_0 abbia le dimensioni di una somma di denaro, o di un valore quale si voglia, le componenti del vettore *y* possono essere interpretate come dei *prezzi ombra*. Questa interpretazione sarà resa abbastanza evidente dai casi particolari a cui accenneremo brevemente in seguito.

Dalla funzione hamiltoniana, definita dalla (14), si traggono le classiche equazioni canoniche

$$(15)\ \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i} \qquad ; \qquad \dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}\ .$$

Queste equazioni determinano la evoluzione temporale dei due vettori *x* ed *y*. Naturalmente quando si voglia determinare completamente questi vettori occorre utilizzare altre informazioni, oltre alle equazioni (15); tali informazioni sono dedotte per esempio dalle condizioni iniziali, che assegnano il vettore x_0 soluzione delle (15), che corrisponde al valore iniziale t_0 del tempo; a queste si possono aggiungere le condizioni finali, oppure le condizioni di trasversalità, che traducono la imposizione che il vettore *x* corrispondente all'istante finale t_1 dell'intervallo considerato appartenga alla ipersuperficie di equazione (9); queste condizioni di trasversalità portano a scrivere che il vettore *y*, nell'istante finale t_1, sia perpendicolare alla ipersuperficie nominata.

Per quanto riguarda il problema che ci interessa qui, cioè il problema della scelta del controllo *u(t)* in modo che il funzionale (8) sia massimo, ci limitiamo ad enunciare i risultati esposti da Pontryagin in classici lavori. Non interessa infatti qui a noi analizzare le questioni teoriche a livello dei metodi matematici ma piuttosto richiamare, anche in modo sommario, i risultati che questi metodi possono dare quando sono applicati alle questioni della teoria economica. Le condizioni di Pontryagin cui accenniamo portano ad imporre la scelta del vettore *u(t)* in modo che per ogni valore del tempo $t \in I$ la funzione di Hamilton abbia valore massimo. Quando si traduce in pratica tale principio si ottiene che la funzione *u(t)* può avere delle discontinuità, dipendentemente dalla struttura topologica dell'insieme *U* nel quale il vettore *u(t)* deve essere scelto. I casi più elementari in cui questi fenomeni si verificano sono dati da funzioni *H* che siano lineari nelle variabili *u* e da insiemi *X* che siano dei poliedri convessi. Allora la ricerca del valore massimo, in ogni istante, della funzione *H* porta a risolvere dei problemi di programmazione lineare.

Riteniamo che le particolarità dei metodi e le proprietà delle soluzioni siano meglio rilevabili sui modelli che presenteremo nel seguito; la loro estrema elementarità non toglie nulla al fatto che essi possano essere considerati in certo senso come esemplari e come capostipite di intere generazioni di modelli analoghi, che si possono ottenere con facili generalizzazioni, anche se la espressione delle soluzioni mediante funzioni abituali e la discussione delle proprietà qualitative delle soluzioni possono acquisire notevoli complicazioni. Non va dimenticato tuttavia che, come abbiamo detto nella introduzione, in questi modelli spesso il problema più importante è quello di raggiungere il difficile punto di equilibrio tra la raffinatezza dello strumento matematico che si utilizza e la possibilità concreta di eseguire le misurazioni e le rilevazioni della grandezze che intervengono e di esplicitare le discussioni sull'andamento del fenomeno che si vuole rappresentare. Pertanto non sempre il modello che più potrebbe soddisfare il matematico risulta essere il più adeguato per la trattazione dei fenomeni economici concreti.

Questa osservazione può servire di ulteriore giustificazione della tecnica che abbiamo scelto per questa esposizione, tecnica che - lo ripetiamo - non vuole essere quella di una rassegna esaustiva di tutti i modelli esistenti né dei metodi che esistono per la trattazione matematica dei fenomeni, ma vuole piuttosto essere la presentazione di certi vantaggi caratteristici di certi modelli, che permettono di descrivere la realtà del comportamento umano di fronte ai fatti della Economia forse meglio che altri.

A) Modello di sviluppo di K. SHELL.

Si potrebbe dire che si tratta di un modello per la programmazione dell'accumulazione di capitale in un sistema economico in un periodo finito, che viene caratterizzato da un istante iniziale ed un istante finale dati da

$$(16)\ t_0 = 0 \ ; \quad t_1 > 0.$$

Indichiamo con x la quantità di capitale pro capite esistente nel sistema, con z la quota pro capite di prodotto globale, con c il consumo pro capite, al di sopra di un livello minimo che potremo considerare come livello di sussistenza. Indicheremo con $\varphi(x)$ la funzione di produzione, di modo che il prodotto globale (quota pro capite) sarà dato da

$$(17)\ z = \varphi(x)\, e^{\rho t}\ , \rho > 0,$$

dove la costante ρ indica un coefficiente che viene spesso indicato come "coefficiente di progresso tecnico". Per la funzione $\varphi(x)$, definita nell'insieme chiuso $X \subset V^1$, dato da

$$(18)\ X = \{x \mid x \geq 0\},$$

sono abitualmente supposte valide le proprietà espresse dalle relazioni seguenti: per $x > 0$ si ha

$$\varphi\,(x) > 0, \qquad \varphi'(x) > 0, \qquad \varphi''(x) < 0,$$

ed inoltre

$$\varphi(0) = 0 \ ; \ \lim_{x\to 0^+} \varphi'(x) = +\infty; \lim_{x\to +\infty} \varphi\,(x) = +\infty \ ; \ \lim_{x\to+\infty} \varphi'(x) = 0.$$

Si prenda in considerazione l'insieme chiuso *U:*

$$(19)\ U = \{u \mid 0 \leq u \leq 1\}.$$

Possiamo pensare che la quota pro capite di reddito globale sia destinata al consumo nella frazione $(1-u)$: si abbia cioè

$$(20)\ c = (1-u)z,$$

e sia destinata alla produzione di nuovo capitale nella frazione u. Supponiamo inoltre che il fenomeno di accrescimento del capitale sia descritto sufficientemente bene dalla equazione differenziale seguente:

$$(21)\ \dot{x} = -\lambda x + u e^{\rho t}\varphi(x).$$

Nella (21) la costante positiva λ sta ad indicare una costante di "decadimento naturale" del capitale, mentre il secondo addendo del secondo membro sta ad indicare l'accrescimento della velocità di produzione di nuovo capitale, conseguente alla destinazione a questo scopo della frazione u della quota pro capite del prodotto globale. Si supponga ora di voler programmare la evoluzione del sistema economico in modo da rendere massimo il funzionale

$$(22)\ J = \int_0^{t_1} c\, e^{-\delta t}\, dt.$$

Il significato economico dell'integrale è abbastanza chiaro: invero alla costante positiva δ può essere attribuito il significato di tasso di sconto continuo e quindi l'integrale dà il valore, attualizzato all'istante iniziale, di tutti i consumi futuri durante l'intervallo di tempo preso in considerazione. La scelta del valore del controllo $u \epsilon U$ corrisponde alla scelta della frazione del prodotto globale nel sistema che deve essere destinata alla produzione di nuovo capitale, e quindi conseguentemente anche alla scelta della frazione complementare che può essere destinata al consumo. Alla condizione di ottimizzazione data dal problema vanno aggiunte le condizioni iniziali e finali che potrebbero venire espresse nel modo seguente: anzitutto la quantità $x(0)$ di capitale esistente nel sistema è un dato noto; si ha cioè

$$(23)\ x(0) = x_0\,.$$

In secondo luogo si vuole che la quantità di capitale $x(t)$ esistente alla fine del periodo di programmazione non sia inferiore ad una data quantità K; si avrà quindi

$$(24)\ x(t_1) \geq K.$$

La funzione di Hamilton in questo caso, tenuto conto delle equazioni precedenti, si scrive nella forma

$$(25)\ H = (1-u)\varphi(x)e^{t(\rho-\delta)} + \ y\, e^{-\delta t}\{u\, \varphi(x)e^{\rho t} - \lambda x\},$$

dove è stata introdotta la variabile ausiliaria $ye^{-\delta t}$ al posto della variabile ausiliaria classica y.

Il significato economico della funzione integranda del funzionale (22) fornisce, con facili considerazioni dimensionali, anche il significato economico della variabile ausiliaria y; essa può essere interpretata come il *prezzo ombra* della velocità di accrescimento della variabile x (capitale) in termini di quantità di prodotto globale consumato. L'evoluzione di tale prezzo è determinata dalla equazione differenziale

$$(26)\ \dot{y} = (\delta + \ \lambda)\, y - \{1 - u + uy\}\, \varphi'(x)\, e^{\rho t},$$

e le condizioni di trasversalità finali danno luogo alla equazione

$$(27)\ \ y(t_1)\,\{x(t_1) - K\} = 0.$$

Il principio di Pontryagin, applicato in questo caso, porta a dare ad *u* un valore tale che *H* sia massimo; ora essendo *H* una funzione lineare di u, e dovendo *u* appartenere all'insieme compatto *U* dato dalla (18) si conclude che la scelta del valore di *u* deve essere fatta nel modo seguente:

(28) se $y > 1$ deve essere $u = 1$; se $y < 1$ deve essere $u = 0$.

Il caso $y = 1$ permette la libertà di scelta del valore di u nell'insieme compatto *U*. Non ci addentriamo qui nella discussione completa che ci porterebbe troppo lontano, né nella interpretazione economica dei risultati; ci basta aver fatto vedere come la natura topologica dell'insieme dei controlli dia luogo alla possibilità di discontinuità nella scelta di questi e quindi anche a delle discontinuità nel complesso del fenomeno economico che si analizza.

B) Modello di investimenti in istruzione di Alberto QUADRIO CURZIO.

Anche con questo modello (Alberto Quadrio Curzio, *Investimenti in istruzione e sviluppo economico*, Bologna, Il Mulino, 1973 (*)) ci si propone di programmare una certa grandezza avente significato economico tra due destinazioni alternative, in modo da ottenere il valore massimo di un certo funzionale su un dato periodo. La grandezza di cui si tratta è il tempo di una unità di lavoro (per esempio un lavoratore) il quale può essere destinato alla qualificazione oppure al lavoro propriamente detto.

Si suppone di poter misurare la "qualificazione" del lavoratore mediante un parametro *x* non negativo e quindi appartenente all'insieme (18). Si suppone inoltre che la qualificazione del lavoratore evolva nel tempo con una legge descritta dalla equazione differenziale

$$(29)\ \dot{x} = -hx + ue^{-kt}.$$

In questa equazione *h* è una costante positiva che potrebbe essere interpretata come "tasso spontaneo di invecchiamento della qualificazione", dovuto al decadimento fisico e mentale e al superamento delle conoscenze inizialmente acquisite; *u* è una variabile di controllo che rappresenta la frazione del tempo che il lavoratore dedica alla riqualificazione, ed infine la costante positiva *k* potrebbe essere interpretata come una espressione della "resistenza all'apprendimento". Si suppone che la variabile di controllo *u* appartenga all'insieme compatto *U* dato dalla

$$(30)\ \ U = \{u \mid 0 < u_0 \le u \le 1\}.$$

Il fatto che l'estremo inferiore u_0 dell'intervallo *U* non sia nullo permette di tener conto del fenomeno che viene spesso denominato *learning by doing*, cioè del fenomeno di addestramento spontaneo che avviene nel lavoratore anche in assenza di una qualificazione esplicita. Si suppone poi che la *resa* del lavoratore sia una funzione lineare crescente del suo livello di qualificazione ed ovviamente del tempo che egli destina al lavoro, e quindi possa essere espressa nella forma:

$$(31)\ (a + bx)(1 - u).$$

Il problema di ottimizzazione si presenta quindi nei termini seguenti: si tratta di scegliere il controllo *u* nell'insieme (30) in modo che sia massimo valore del funzionale

$$(32)\ \ J = \int_0^{t_1} (a + bx)(1 - u)e^{-\delta t}\,dt$$

che rappresenta ovviamente la somma dei valori scontati delle "rese" del lavoro durante l'intera vita lavorativa del soggetto; la costante positiva δ rappresenta, anche in questo caso, un tasso di sconto continuo. Non stiamo a riportare qui la discussione completa del problema, la quale si fa tenendo conto del livello iniziale di qualificazione e della condizione finale con la quale si impone che la qualificazione del lavoratore, alla fine del periodo di presenza al lavoro, non debba scendere al di sotto di un certo livello minimo considerato accettabile. Ci limitiamo ad enunciare un risultato tipico, che si ottiene ovviamente in presenza di determinati valori opportuni dei parametri che abbiamo introdotto: la condizione di ottimalità del funzionale (32) comporta che il valore della variabile di controllo debba essere uguale ad 1 in un periodo iniziale e diventi bruscamente u_0 ad un istante critico del periodo di programmazione. Non stiamo a riportare altri esempi di modelli economici di questo tipo, perché preferiamo dedicare il poco tempo che ci rimane a dar cenno di altri problemi economici che riteniamo interessanti.

BIBLIOGRAFIA ESSENZIALE

PONTRYAGIN (L. S.), BOLTYANSKII (V.G.), GAMKRELIDZE (R.V.), MISHCHENKO (E.F.) - *The mathematical Theory of optimal Processes* - Oxford (1964). (Traduzione dal russo). Pergamon Press.

ISAACS (R.) - *Differential Games* - New York (1965). John Wiley and Sons.

INTRILLIGATOR (M.D.) - *Mathematical optimization and economic Theory* - Englewood Cliffs (1971) Prentice-Hall Inc.

SHELL (K.) - *Essays on the Theory of optimal economic Growth* - Cambridge Mass. (1967) - The M.I.T. Press.

(*) Il testo è disponibile in Archivio.

Parte III

5 Per concludere, presenteremo qui un esempio caratteristico di gioco differenziale che, pur essendo del tutto schematico, è tuttavia atto a dare un'idea del tipo di procedimenti che sono adottati in questi casi.
Il gioco differenziale che stiamo per presentare viene da qualche Autore indicato come 'Gioco della guerra': lo schema si adatta a vari tipi di competizione, per esempio anche a competizioni nel campo economico, beninteso entro i limiti nei quali le ipotesi drasticamente semplificative sono
…………………………………………………..

NdR Ottobre 2013. *Il testo reimpaginato che proponiamo, purtroppo incompleto nella terza parte, crediamo sia stato preparato per una serie di tre lezioni svolte alla Montedison nella seconda metà degli anni ‘70*.

È disponibile in Archivio la tesi di Laurea in Matematica di Alfredo Gysi (Università di Milano, 1972): *Giochi differenziali ed Economia*.

P. Cézanne. I giocatori di carte. Parigi, Museo d'Orsay